Midtoets Vectoranalyse

27 mei 2011

De toets bestaat uit de onderstaande **drie** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (12+6+12 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - f(z) = 0,$$

waarbij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^2-functie is met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$.

1. Bewijs dat het raakvlak aan S in $(0, 0, 0)$ horizontaal (evenwijdig aan het xy-vlak) is.
2. Bewijs dat het oppervlak S in de buurt van $(0, 0, 0)$ geschreven kan worden als grafiek van een C^1-functie g van twee variabelen, d.w.z.

   $$z = g(x, y),$$

   met $g(0, 0) = 0$.
3. Je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 2 zelfs een C^2-functie is. Toon aan dat deze functie g in $(0, 0)$ een lokaal minimum heeft.

Opgave 2 (10 + 10 + 10 pt.)
Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2-functie zijn, en laat $z = g(x, y)$. Via $x = e^r \cos\theta$ en $y = e^r \sin\theta$ wordt z een functie van (r, θ).

1. Druk de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial r}$ en $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ uit in de partiële afgeleiden $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial g}{\partial y}$.
2. Gebruik dit resultaat om $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial g}{\partial y}$ uit te drukken in $\frac{\partial z}{\partial r}$ en $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.
3. Toon vervolgens aan dat

   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right).$$

Z.O.Z.

Opgave 3 (18+12 pt.)
De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y, z) = x + yz$. Het boloppervlak S is gegeven door $g(x, y, z) = 0$, met $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

1. Toon aan dat f op S twee kritieke punten heeft.

2. Bepaal de maximale en minimale waarde van f op S.